ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI LỚP 8 Trường NGUYỄN GIA THIỀU (2014-2015)

Thời gian: 120 phút

(NGÀY THI: 15/11/2014)

Bài 1: (2 điểm) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - x - 2001.2002$

b) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

c) $x^6 + x^4 - x^2y^2 + y^4 + y^6$

Bài 2: (2 điểm) Tìm x, biết:

a) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24$

b) $|x^2 - 1| + |a(x-1)| = 0$

Bài 3: (1 điểm) Cho 4 số a, b, c, d thỏa mãn: a + b = c + d; $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Chứng minh rằng: $a^{202} + b^{202} = c^{202} + d^{202}$

Bài 4: (1 điểm) Chứng minh rằng với x, y nguyên thì:
$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$ là một số chính phương.

Bài 5: (0,5 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2014$

Bài 6: (2,5 điểm) Cho ΔABC vuông tại A (AB < AC), có AH là đường cao. Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chức C vẽ hình vuông AHKE.

a) Chứng minh: $C < 45^0$.

b) Gọi P là giao điểm của AC và KE. Chứng minh: AB = AP.

c) Gọi Q là đỉnh thứ tư của hình bình hành APQB, gọi I là giao điểm của BP và AQ. Chứng minh
ba điểm H, I, E thẳng hàng.

d) Chứng minh: HE // QK.

Bài 7: (1 điểm) Cho tam giác DBC nhọn. Kẻ $BM \perp CD (M \in CD), CA \perp BD (A \in BD)$. Gọi I là trung điểm của AB, qua I kẻ đường thẳng vuông góc với AB và cắt CB tại O; qua M kẻ đường thẳng vuông góc với MO cắt DA tại K. Chứng minh: $KA.KB = KM^2$.

★ HẾT ★

HƯỚNG DẪN ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI LỚP 8
Trường NGUYỄN GIA THIỀU (14-15)

Bài 1: (2 điểm) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2-x-2001.2002$

$$x^2-x-2001.2002=x^2+2001x-2002x-2001.2002$$
$$=x\left(x+2001\right)-2002\left(x+2001\right)=\left(x+2001\right)\left(x-2002\right)$$

b) x^3-5x^2+8x-4

$$x^3-5x^2+8x-4=x^3-x^2-4x^2+4x+4x-4=x^2\left(x-1\right)-4x\left(x-1\right)+4\left(x-1\right)$$
$$=\left(x-1\right)\left(x^2-4x+4\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)^2$$

c) $x^6+x^4-x^2y^2+y^4+y^6$

$$x^6+x^4-x^2y^2+y^4+y^6=\left(x^6+y^6\right)+\left(x^4-x^2y^2+y^4\right)=\left(x^2+y^2\right)\left(x^4-x^2y^2+y^4\right)+\left(x^4-x^2y^2+y^4\right)$$
$$=\left(x^4-x^2y^2+y^4\right)\left(x^2+y^2+1\right)$$

Bài 2: (2 điểm) Tìm x, biết:

a) $\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)=24$

$$\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)=24$$
$$\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(x+4\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)=24\Leftrightarrow\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)=24$$
$$\Leftrightarrow\left[\left(x^2+5x+5\right)-1\right]\left[\left(x^2+5x+5\right)+1\right]=24\Leftrightarrow\left(x^2+5x+5\right)^2-1=24$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2+5x+5\right)^2=25\Leftrightarrow x^2+5x+5=5 \text{ hay } x^2+5x+5=-5$$
$$\Leftrightarrow x^2+5x=0 \text{ hay } x^2+5x+10=0\Leftrightarrow x\left(x+5\right)=0 \text{ hay } \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}=0\left(\text{vô lí}\right)$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ hay } x=-5$$

Vậy x = 0 hay x = -5

b) $\left|x^2-1\right|+\left|a\left(x-1\right)\right|=0\ \left(1\right)$

TH1: a = 0, khi đó, (1) trở thành:

$$\left|x^2-1\right|=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm1$$

TH2: $a\neq0$

Ta có: $\left|x^2-1\right|+\left|a\left(x-1\right)\right|=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-1=0\\a\left(x-1\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Vậy: Khi a = 0 thì $x=\pm1$

Khi $a\neq0$ thì x =1

Bài 3: (1 điểm) Cho 4 số a, b, c, d thỏa mãn: a + b = c + d; $a^2+b^2=c^2+d^2$. Chứng minh rằng: $a^{202}+b^{202}=c^{202}+d^{202}$

Ta có: $a+b=c+d \Rightarrow a^2+b^2+2ab=c^2+d^2+2cd \Rightarrow 2ab=2cd$

Mà $a^2+b^2=c^2+d^2$ nên $a^2+b^2-2ab=c^2+d^2-2cd \Leftrightarrow (a-b)^2=(c-d)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=c-d \\ a-b=d-c \end{array}\right.$

TH1: $a-b=d-c$

Ta có :

$$\begin{cases} a-b=d-c \\ a+b=c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+a+b=d-c+c+d \\ a+b=c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{202}=d^{202} \\ b^{202}=c^{202} \end{cases} \Rightarrow a^{202}+b^{202}=c^{202}+d^{202}$$

TH2: $a-b=c-d$

Ta có :

$$\begin{cases} a-b=c-d \\ a+b=c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+a+b=c-d+c+d \\ a+b=c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{202}=c^{202} \\ b^{202}=d^{202} \end{cases} \Rightarrow a^{202}+b^{202}=c^{202}+d^{202}$$

Cách 2:

Ta có: $a+b=c+d \Rightarrow \begin{cases} a-c=d-b \\ a-d=c-b \end{cases}$

Ta có: $a^2+b^2=c^2+d^2 \Leftrightarrow a^2-c^2=d^2-b^2 \Leftrightarrow (a-c)(a+c)=(d-b)(d+b)$

mà $a-c=d-b$ nên $(d-b)(a+c)=(d-b)(d+b) \Leftrightarrow (d-b)(a+c-d-b)=0$

mặt khác: $a-d=c-b$ nên $(d-b)(c-b+c-b)=0 \Leftrightarrow (d-b)(c-b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=d \\ c=b \end{array}\right.$....

Bài 4: (1 điểm) Chứng minh rằng với x, y nguyên thì:
$A=(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$ là một số chính phương.

$A=(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$

$A=(x+y)(x+4y)(x+2y)(x+3y)+y^4$

$A=(x^2+5xy+4y^2)(x^2+5xy+6y^2)+y^4$

Đặt $t=x^2+5xy+5y^2$, khi đó biểu thức trở thành:

$A=(t-y^2)(t-y^2)+y^4$

$A=t^2-y^4+y^4$

$A=t^2$

$A=(x^2+5xy+5y^2)^2$ là số chính phương với x, y là số nguyên

Bài 5: (0,5 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B=5x^2+2y^2+4xy-2x+4y+2014$

Cách 1: $B=5x^2+2y^2+4xy-2x+4y+2014$

$B=(x^2-2x+1)+(4x^2+4xy+y^2)+(y^2+4y+4)+2009$

$B=(x-1)^2+(2x+y)^2+(y+2)^2+2009 \geq 2009$

Vậy $B_{min} = 2009$. Dấu ''='' xảy ra khi $\begin{cases}(x-1)^2 = 0\\(2x+y)^2 = 0\\(y+2)^2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\y = -2\end{cases}$

Cách 2:

$$2B = 10x^2 + 4y^2 + 8xy - 4x + 8y + 4028$$

$$\Leftrightarrow 2B = 4y^2 + 2.(2y)(2x+2) + (2x+2)^2 - 4x^2 - 8x - 4 + 10x^2 - 4x + 4028$$

$$\Leftrightarrow 2B = (2y+2x+2)^2 + 6x^2 - 12x + 4024$$

$$\Leftrightarrow 2B = (2y+2x+2)^2 + 6(x-1)^2 + 4018 \geq 4018$$

$$\Leftrightarrow B \geq 2009$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}2y+2x+2 = 0\\x-1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = -2\\x = 1\end{cases}$

Vậy GTNN của B là 2009 khi $\begin{cases}x = 1\\y = -2\end{cases}$

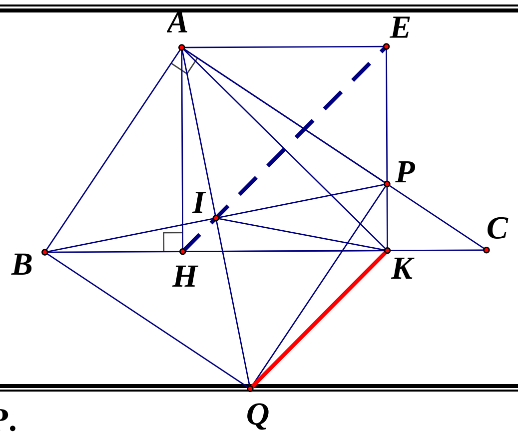
Bài 6: (2,5 điểm) Cho ΔABC vuông tại A (AB < AC), có AH là đường cao. Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chức C vẽ hình vuông AHKE.

a) Chứng minh: $C < 45^0$.

Xét ΔABC, ta có: AB < AC (gt)

$\Rightarrow C < B$ (quan hệ cạnh và góc đối diện trong tam giác)

mà $C + B = 90^0$ (ΔABC vuông tại A) nên $2C < 90^0 \Rightarrow C < 45^0$



b) Gọi P là giao điểm của AC và KE. Chứng minh: AB = AP.

Xét ΔAHC và ΔAEP, ta có: $\begin{cases}AH = AE\ (\text{vì AHKE là hình vuông})\\AHB = AEP\ (= 90^0)\\HAB = EAP\ (\text{cùng phụ HAP})\end{cases}$

$\Rightarrow \Delta AHB = \Delta AEP\ (g-c-g) \Rightarrow AB = AP$

c) Gọi Q là đỉnh thứ tư của hình bình hành APQB, gọi I là giao điểm của BP và AQ. Chứng minh ba điểm H, I, E thẳng hàng.

Xét hình bình hành APQB, ta có I là giao điểm của BP và AQ (gt) $\Rightarrow$ I là trung điểm của BP và AQ.

Ta có : $\begin{cases} HA = HK(\text{AHKE là hình vuông}) \\ EA = EK(\text{AHKE là hình vuông}) \\ IA = IK\left(=\frac{1}{2}BP\right) \end{cases}$

$\Rightarrow$ H, E, I cùng thuộc đường trung trực của đoạn AK. $\Rightarrow$ H, I, E thẳng hàng.

d) Chứng minh: HE // QK.

Xét hình bình hành ABQP, ta có $BAP = 90^0$ (ΔABC vuông tại A)

$\Rightarrow$ hình bình hành ABQP là hình chữ nhật (tứ giác là hình bình hành có một góc vuông)

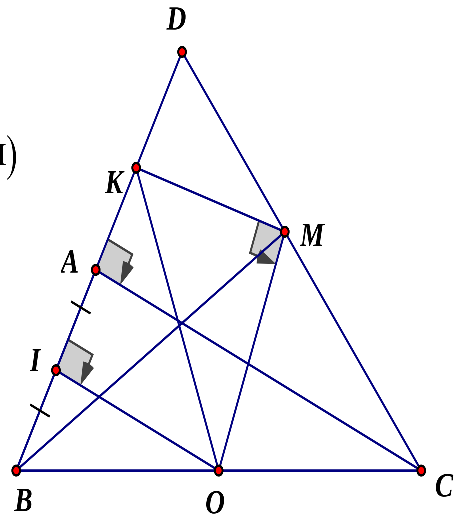
Ta có: $\begin{cases} KI = \frac{1}{2}BP(\text{KI là trung tuyến ứng với cạnh huyền BP}) \\ BP = AQ(\text{ABQP là hình chữ nhật}) \end{cases} \Rightarrow KI = \frac{1}{2}AQ$

Xét ΔKAQ, ta có: $\begin{cases} \text{KI là đường trung tuyến (I là trung điểm của AQ)} \\ KI = \frac{1}{2}AQ\ (\text{cmt}) \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta$KAQ vuông tại K

$\Rightarrow QK \perp AK$ mà $AK \perp HE$ (vì AHKE là hình vuông) nên HE // QK.

Bài 7: (1 điểm) Cho tam giác DBC nhọn. Kẻ $BM \perp CD(M \in CD), CA \perp BD(A \in BD)$. Gọi I là trung điểm của AB, qua I kẻ đường thẳng vuông góc với AB và cắt CB tại O; qua M kẻ đường thẳng vuông góc với MO cắt DA tại K. Chứng minh: $KA.KB = KM^2$.



Ta có: $\begin{cases} KA = KI - IA \\ KB = KI + IB \end{cases} \Rightarrow KA.KB = (KI - IA)(KI - IB)$

mà IA = IB (I là trung điểm của AB)

nên $KA.KB = (KI - IA)(KI - IA) \Rightarrow KA.KB = KI^2 - IB^2$ (1)

Ta có: $KM^2 + MO^2 = OK^2$ (định lí Pitago trong ΔMKO vuông tại M)

$\Rightarrow KM^2 = OK^2 - MO^2$

mà $\begin{cases} MO = BO\left(=\frac{1}{2}BC\right) \\ KO^2 = IO^2 + KI^2 (\text{định lí Pitago trong } \Delta IKO \text{ vuông tại I}) \end{cases}$

nên $KM^2 = IO^2 + KI^2 - BO^2$

Mặt khác: $BO^2 = IB^2 + IO^2$ (định lí Pitago trong ΔIBO vuông tại I)

nên $KM^2 = IO^2 + KI^2 - (IB^2 + IO^2)$

$\Rightarrow KM^2 = IO^2 + KI^2 - IB^2 - IO^2$

$\Rightarrow KM^2 = KI^2 - IB^2$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra: $KA.KB = KM^2$

★ HẾT ★